MATHEMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Étant donnée une suite de nombres complexes $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, on dira que la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p$ est convergente (resp. absolument convergente) si les séries $\sum_{p=-\infty}^{-1} a_p$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} a_p$ sont convergentes (resp. absolument convergentes) et on notera $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p$ la somme $\sum_{p=-\infty}^{-1} a_p + \sum_{p=0}^{+\infty} a_p$.

On rappelle que si les séries $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p^2$ et $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p^2$, où $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ sont deux suites de nombres complexes, sont absolument convergentes, alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p b_p|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p|^2\Big)\Big(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |b_p|^2\Big).$$

A

1° La fonction S_n définie pour $\theta \in \mathbb{R}$ par $S_n(\theta) = \sum_{p=-n}^{n} a_p e^{ip\theta}$ sera appelée un polynôme trigonométrique d'ordre $\leqslant n$ (où n est un entier $\geqslant 0$ et les coefficients a_p sont des nombres complexes).

a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme trigonométrique S_n d'ordre $\leqslant n$ on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(\theta)|^2 d\theta = \sum_{p=-n}^{n} |a_p|^2.$$

b. Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme trigonométrique S_n d'ordre $\leqslant n$ on ait :

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |S'_n(\theta)|^2 \leqslant K_1 n^3 \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(\theta)|^2 d\theta$$

où S'_n désigne la fonction dérivée de S_n.

c. En déduire qu'il existe une constante $K_2 > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme trigonométrique S_n d'ordre $\leqslant n$ on ait :

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |S'_n(\theta)| \leqslant K_2 n^{\frac{3}{2}} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |S_n(\theta)|.$$

d. En déduire qu'il existe une constante $K_3 > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme P_n de degré $\leqslant n$ on ait :

$$|P'_n(x)| \leqslant \frac{K_3 n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)|$$

pour $-1 < x < 1$, où P'_n désigne le polynôme dérivé de P_n.

2° Soient n un entier $\geqslant 1$ et $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$ les zéros du polynôme T_n défini pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ par

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad \text{avec} \quad x = \cos\theta,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

.../...

E.N.S. ST-CLOUD & FONTENAY Option Mathématiques (M') 1977 ×19×

a. Démontrer que pour tout polynôme P_{n-1} de degré $\leqslant n-1$ on a l'égalité :

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1}(x_k) \frac{T_n(x)}{(x-x_k)\,T'_n(x_k)}$$

pour $x \neq x_k$, $k = 0, \ldots, n-1$ où T'_n désigne la fonction dérivée de T_n.

En déduire l'égalité :

$$T'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_n(x)}{x-x_k} \quad \text{pour} \quad x \neq x_k,\ k = 0, \ldots, n-1.$$

b. Soit A une constante > 0. On considère dans cette question les polynômes P_{n-1} de degré $\leqslant n-1$ tels que pour $-1 < x < 1$ on ait

$$|P_{n-1}(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Montrer que pour $x_{n-1} < |x| < 1$ on a : $|P_{n-1}(x)| \leqslant An$.

Justifier que pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a : $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x$ et en déduire que pour $|x| \leqslant x_{n-1}$ on a : $|P_{n-1}(x)| \leqslant An$.

3° En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout polynôme P_n de degré $\leqslant n$ on ait :

$$\sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P'_n(x)| \leqslant K n^{\frac{5}{2}} \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P_n(x)|.$$

B

I. On désigne par E^0 l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et périodiques de période 2π.

1° Soit $f \in E^0$. On pose pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$a_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-ip\theta}\, d\theta.$$

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$a_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\theta)\, e^{-ip\theta}\, d\theta.$$

2° On considère dans cette question les fonctions f appartenant à E^0 telles que $a_p(f) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Pour $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on considère le polynôme trigonométrique $T_\delta(\theta) = 1 - \cos\delta + \cos\theta$.

a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,(T_\delta(\theta))^n\, d\theta = 0.$$

b. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} f(\theta)\,(T_\delta(\theta))^n\, d\theta = \lim_{n \to +\infty} \int_{\delta}^{\pi} f(\theta)\,(T_\delta(\theta))^n\, d\theta = 0.$$

c. En déduire que $f(0) = 0$.

d. En déduire que f est identiquement nulle.

3° On considère dans cette question les fonctions f appartenant à E^0 telles que la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f)$ soit absolument convergente.

a. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f)\, e^{ip\theta}.$$

b. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p(f)|^2.$$

.../...

×20×

4° On considère dans cette question les fonctions f appartenant à E^0 telles que la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} p\, a_p(f)$ soit absolument convergente.

a. Montrer que f est continuement dérivable.

b. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$, indépendante de f, telle que l'on ait :

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)|^2 \leqslant K \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 \, d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta \right\}$$

où f' désigne la dérivée de f.

II. On désigne par E^∞ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et périodiques de période 2π.

On dira qu'une suite $(a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes est du type (S) si pour tout entier $k \geqslant 0$ la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^k a_p$ est absolument convergente.

1° Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes du type (S).

Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour $\theta \in \mathbb{R}$ par

$$f(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p e^{ip\theta}$$

appartient à E^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a : $a_p(f) = a_p$ où $a_p(f)$ est défini en B I 1°.

2° Soit $f \in E^\infty$. Montrer que la suite $(a_p(f))_{p \in \mathbb{Z}}$ est du type (S) et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(f) e^{ip\theta}.$$

III. Pour une fonction $f \in E^\infty$, on considère les trois conditions suivantes :

(A_1) Il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout entier $k \geqslant 1$ on ait :

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(\theta)| \leqslant A^k k!$$

(A_2) Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout entier $k \geqslant 1$ on ait :

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(\theta)|^2 \, d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant B^k k!$$

(A_3) Il existe une constante $t > 0$ telle que la série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(k!)^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(\theta)|^2 \, d\theta$$

soit convergente,

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f.

On dira qu'une suite $(a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes est du type (E) s'il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ telles que pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$ on ait : $|a_p| \leqslant \lambda e^{-\mu |p|}$.

1° *a.* Pour une fonction $f \in E^\infty$, montrer que les conditions (A_1) et (A_2) sont équivalentes.

b. Pour une fonction $f \in E^\infty$, montrer que les conditions (A_2) et (A_3) sont équivalentes.

2° Soit $f \in E^\infty$ satisfaisant la condition (A_3). Montrer que la suite $(a_p(f))_{p \in \mathbb{Z}}$ est du type (E).

3° Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes du type (E).

Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour $\theta \in \mathbb{R}$ par

$$f(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p e^{ip\theta}$$

appartient à E^∞ et satisfait la condition (A_3).

FIN

×21×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail